

φ von 0 bis 90° variiert, der gleiche schnelle Abfall der HALL-Spannung bei kleinen Abweichungen des Winkels von 90° ergibt, wie er in Abb. 1 für Ni dargestellt wurde.

Es darf noch vermerkt werden, daß die Messungen an dem Fe–Ni-Blech die gleichen Ergebnisse lieferten, gleichgültig ob die VZR in die y - oder x -Richtung fällt. Das wird verständlich, wenn man die beiden Energieterme vergleicht, die in Gl. (2) den Einfluß der Anisotropie darstellen. Nach BECKER und DÖRING³ ist die Vorzugsrichtung in dem von SNOEK entwickelten PUPIN-Spulenblech etwa so zu beschreiben, als ob sie durch eine Zugspannung σ von rund 104 kg/cm^2 hervorgerufen würde. Das gibt, mit dem Wert der Sättigungsmagnetostriktion $\lambda_s \sim 2 \cdot 10^{-5}$ multipliziert, eine Anisotropieenergie

$$E_A = 3/2 \lambda_s \sigma = 3 \cdot 10^5 \text{ erg/cm}^3.$$

Vergleichen wir mit dem Wert der Streufeldenergie ($N_y \sim 0$, $N_z \sim 4\pi$)

$E_{\text{Streufeld}} \sim M_s^2 \cdot N_z/2 = 1250^2 \cdot 4\pi/2 \sim 10^7 \text{ erg/cm}^3$, so sehen wir, daß der Einfluß der Vorzugsrichtung gegenüber dem der Formanisotropie des Streifens vernachlässigt werden kann.

³ R. BECKER u. W. DÖRING, Ferromagnetismus, Springer-Verlag, Berlin 1939, S. 432.

§ 4.

Die bis heute durchgeführten Messungen sind noch zu unvollständig, um eine Auswertung in Richtung der Aufteilung des Effektes und damit eine Entscheidung über die einleitend aufgeworfene Behauptung zu erlauben. Sie liefern aber ein vorläufiges Resultat, dem man nicht alle Bedeutung absprechen kann, nämlich den Hinweis, daß der Lage des Probestreifens im Magnetfeld bei ferromagnetischen Proben viel größere Bedeutung zukommt als bei nichtmagnetischen. Bei nicht exakter und nicht exakt reproduzierbarer Lage des Streifens muß mit nicht unbedeutenden Meßfehlern gerechnet werden. Darauf hat unter anderem auch JAN⁴ hingewiesen. Aus Abb. 1 entnehmen wir, daß bei einer Verdrehung um 5° die HALL-Spannung des Ni bereits um ca. 7% absinkt, während der entsprechende Abfall bei Ag nur 6% beträgt.

Abschließend sei nur noch vermerkt, daß auch diese Teiluntersuchung im Rahmen des vom Bundesministerium für Verkehr und Elektrizitätswirtschaft subventionierten Programms durchgeführt worden ist.

⁴ J. P. JAN, Helv. Phys. Acta 25, 677 [1952].

Ein Verfahren zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit dünner Proben bei hohen Temperaturen*

Von FRANZ PH. POTT **

Aus dem Institut für Physikalische Chemie der Universität Münster (Westf.).
(Z. Naturforsch. 13 a, 116–125 [1958]; eingegangen am 15. Dezember 1956)

Es wird eine Methode beschrieben, mit der die Wärmeleitfähigkeit dünner Metallstreifen bis zu hohen Temperaturen unter gleichzeitiger experimenteller Berücksichtigung der Abstrahlungsverluste gemessen werden kann. Die im Experiment auftretenden Störeinflüsse durch parasitäre Thermospannungen, unsymmetrische Temperaturverteilung längs der Probe, ungleiche Temperaturen oberhalb und unterhalb der Probe, nichtstationäre Vorgänge, Änderung der Abstrahlungsverhältnisse während der Versuchsdurchführung und Wärmeverluste an den Schmalseiten der Probe werden in Korrekturrechnungen berücksichtigt. Erfolgen die Messungen im Hochvakuum, dann läßt sich aus den Abstrahlungsverlusten das Absorptionsvermögen der Probenoberfläche für die Temperaturstrahlung berechnen.

Bei Wärmeleitfähigkeitsmessungen sind störende Wärmeverluste nicht zu vermeiden. Bisher war man bestrebt, sie durch experimentelle Maßnahmen, ins-

besondere durch Schutzingheizung¹, zurückzudrängen oder mit Hilfe von Korrekturrechnungen² zu berücksichtigen. Diese Methoden lassen sich auf

** Jetzt Braunschweig, Physikalisch-Technische Bundesanstalt.

¹ Z. B. R. W. POWELL, Proc. Phys. Soc., Lond. 46, 659 [1934].

² Z. B. W. JAEGER u. H. DIESSELHORST, Wiss. Abh. PTR 3, 269 [1900].

* Auszug aus dem theoretischen Teil der Dissertation: Untersuchungen zur Gültigkeit des WIEDEMANN–FRANZ–LORENZschen Gesetzes an Unordnungs- und Ordnungsphasen der Kupfer–Palladium-Legierungsreihe unter Anwendung einer neuen Methode zur Messung der Wärmeleitfähigkeit bei hohen Temperaturen, Münster (Westf.) 1955.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

dünne Proben bei höheren Temperaturen nicht ohne größere Fehler anwenden. Es soll daher im folgenden für bandförmige Proben ein Verfahren angegeben werden, das die thermische Leitfähigkeit unter gleichzeitiger Erfassung der Wärmeverluste zu messen gestattet³. Den Ausgangspunkt für diese Methode bildet die Anordnung von KOHLRAUSCH⁴, bei der die Wärmeleitfähigkeit einer stromdurchflossenen, stabförmigen Probe aus der Temperaturdifferenz zwischen Probenmitte und den auf konstanter Temperatur gehaltenen Probenenden, sowie aus den elektrischen und geometrischen Versuchsdaten bestimmt wird. Sollen auch die Wärmeverluste, die das ursprüngliche KOHLRAUSCHSche Verfahren nicht erfaßt, berücksichtigt werden, dann bedarf es einer zusätzlichen experimentellen Aussage über diese Verluste. Wie eine solche in einfacher Weise zu gewinnen ist, wird in den folgenden Rechnungen gezeigt.

Erweiterung der Methode von Kohlrausch

Als Ausgangsgleichung dient die zeitabhängige dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung unter Berücksichtigung einer zeitlich und örtlich konstanten Jouleschen Wärmeerzeugung⁵

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{c d} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + \frac{j^2 \varrho}{c d}. \quad (1)$$

Hier bedeuten λ die spezifische Wärmeleitfähigkeit, ϱ den spezifischen elektrischen Widerstand, j die Stromdichte, c die spezifische Wärme und d die Dichte.

Betrachtet man nur ebene Proben, die in z -Richtung dünn sein sollen (Dicke $2b$), so kann die Temperatur um die Mittelebene $z=0$ in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden. Die Koeffizienten dieser Entwicklung gewinnt man mit der später zu beweisenden Annahme, daß die Wärmeflußdichte j durch die obere und untere Oberfläche der Probe proportional zur Temperaturdifferenz ($\vartheta_{\text{Oberfl.}} - \vartheta_u$) zwischen den einzelnen Flächen und der Probenumgebung sein soll. Es gilt dann

$$j_{\text{Oberfl.}} = h(\vartheta_{\text{Oberfl.}} - \vartheta_u). \quad (2)$$

Da h eine Konstante ist, stellt diese Gleichung das NEWTONSche Abkühlungsgesetz dar. Ändert sich zu-

sätzlich noch die räumlich konstante Umgebungstemperatur langsam und linear mit der Zeit: $\vartheta_u^* = \vartheta_u + \beta t$ (ϑ_u und β sind Konstanten), so ergibt sich für die Temperaturverteilung in der ebenen Platte unter Vernachlässigung höherer Glieder folgende Entwicklung in z :

$$\vartheta(x, y, z, t) = \vartheta(x, y, 0, t) - \frac{h[\vartheta(x, y, 0, t) - (\vartheta_u + \beta t)]}{2 \lambda b} z^2. \quad (3)$$

Durch Einsetzen von (3) in (1) erhält man nach Unterdrückung kleiner Größen, Spezialisierung auf bandförmige Proben der Länge $2l$ (x -Richtung) und Breite $p/2$ (y -Richtung) (vgl. Abb. 1) und unter Berücksichtigung eines in Längsrichtung fließenden Probenstromes J die Wärmeleitungsgleichung

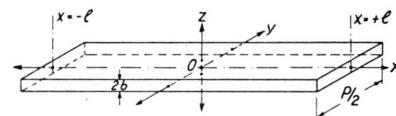


Abb. 1. Geometrische Daten der bandförmigen Probe.

für die Mittelebene rechteckiger Platten, deren Oberflächen nach dem NEWTONSchen Gesetz Wärme an die Umgebung abgeben

$$\frac{1}{z} \frac{\partial \vartheta_{x,y}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta_{x,y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{x,y}}{\partial y^2} - \mu^2 [\vartheta_{x,y} - (\vartheta_u + \beta t)] + k. \quad (4)$$

Hierin bedeuten die Abkürzungen:

$$\vartheta_{x,y} = \vartheta(x, y, 0, t) = \vartheta(x, y, t); \\ z = \frac{\lambda}{c d}; \quad \mu^2 = \frac{p h}{\lambda \varrho}; \quad k = \frac{J^2 \varrho}{\lambda q^2} \quad \text{und} \quad q = p b. \quad (5)$$

Im Experiment kann man annähernd den Fall realisieren, daß ein stationärer Wärmestrom die bandförmige Probe nur in einer Richtung durchsetzt (x -Richtung). Für diesen Spezialfall geht (4) mit der Abkürzung $\vartheta_x = \vartheta(x, t)$ in die eindimensionale Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \vartheta_x}{dx^2} - \mu^2 (\vartheta_x - \vartheta_u) + k = 0 \quad (6)$$

über. Da im Versuch die Probenenden $x = \pm l$ auf der konstanten Temperatur ϑ_u gehalten werden sollen, so ergibt die Integration von (6) die zu $x=0$

⁴ F. KOHLRAUSCH, Ann. Phys., Lpz. (4) 1, 132 [1900]. — W. JAEGER U. H. DIESSELHORST, I. c.².

⁵ H. S. CARSLAW U. J. C. JAEGER, Conduction of Heat in Solids, Oxford 1948, S. 9 bzw. 118.

³ Berücksichtigung der Wärmeverluste auf Grund gesondert durchgeführter Abstrahlungsmessungen: J. LANGMUIR U. J. B. TAYLOR, Phys. Rev. 50, 68 [1936].

symmetrische Temperaturverteilung⁵ in der Mittel- ebene der Probe

$$\vartheta_x - \vartheta_u = \left(\vartheta_l - \vartheta_u - \frac{k}{\mu^2} \right) \frac{\text{Cof } \mu x}{\text{Cof } \mu l} + \frac{k}{\mu^2}. \quad (7 \text{ a})$$

Aus experimentellen Gründen ist es nicht ratsam, Temperaturmeßstellen an die Probenenden zu legen. Bezüglich der in der Nachbarschaft der Enden $x = \pm l'$ angebrachten Meßstellen schreibt sich die Temperaturverteilung

$$\vartheta_x - \vartheta_u = \left(\vartheta_{l'} - \vartheta_u - \frac{k}{\mu^2} \right) \frac{\text{Cof } \mu x}{\text{Cof } \mu l'} + \frac{k}{\mu^2}. \quad (7 \text{ b})$$

Diese Gleichung enthält als Unbekannte die Wärmeleitfähigkeit λ und die Konstante des NEWTONSchen Abkühlungsgesetzes h . Durch Aufstellung von (7 b) für zwei verschiedene Werte der willkürlichen Variablen (z. B. für die Stromstärken J_1 und J_2 oder für die Meßstellen x_1 und x_2) können die zur Ermittlung von λ und h erforderlichen Bestimmungsgleichungen gewonnen werden. Experimentell hat sich folgender Weg bewährt: In einem ersten Teilversuch werden ähnlich wie bei KOHLRAUSCH die Temperaturdifferenzen $(\vartheta_o - \vartheta_u)$ und $(\vartheta_{l'} - \vartheta_u)$ zwischen Probenmitte $x = 0$ bzw. Nachbarschaft der Probenenden $x = \pm l'$ und Umgebung gemessen, während die Probe durch den Strom J aufgeheizt wird (Probenheizungsversuch: Index PH). In diesem Fall ergibt sich durch Anwendung von (7 b)

$$(\vartheta_o - \vartheta_u)^{\text{PH}} = \left[(\vartheta_{l'} - \vartheta_u)^{\text{PH}} - \frac{k}{\mu^2} \right] \frac{1}{\text{Cof } \mu l'} + \frac{k}{\mu^2}. \quad (8)$$

Der zweite Teilversuch wird ohne Stromheizung durchgeführt. In diesem Fall werden aber die Probenenden durch äußere Heizung auf die Temperatur $\vartheta_{l'}$ gebracht (Endenheizungsversuch: Index EH). Auf diese Weise bilden sich zwischen der Probenmitte, den Meßstellen $x = \pm l'$ und der Umgebung Temperaturdifferenzen aus, für die sich nach (7 b) der Zusammenhang

$$(\vartheta_o - \vartheta_u)^{\text{EH}} = (\vartheta_{l'} - \vartheta_u)^{\text{EH}} \frac{1}{\text{Cof } \mu l'} \quad (9)$$

ergibt. Aus (8) und (9) erhält man durch Auflösung nach λ und h unter Berücksichtigung von (5)

$$\lambda = \frac{p h}{q \mu^2} = \frac{p l'^2}{q} \frac{h}{\left(\text{Ar Cof } \frac{(\vartheta_{l'} - \vartheta_u)^{\text{EH}}}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{\text{EH}}} \right)^2} \quad (10)$$

und

$$h = \frac{J^2 \rho}{p q} \frac{\mu^2}{k} = \frac{J^2 \rho}{p q} \quad (11)$$

$$\cdot \frac{(\vartheta_{l'} - \vartheta_u)^{\text{EH}} - (\vartheta_o - \vartheta_u)^{\text{EH}}}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{\text{PH}} (\vartheta_{l'} - \vartheta_u)^{\text{EH}} - (\vartheta_{l'} - \vartheta_u)^{\text{PH}} (\vartheta_o - \vartheta_u)^{\text{EH}}}.$$

In diesen Gleichungen treten nur noch Meßgrößen auf. Aus ihnen kann also die Wärmeleitfähigkeit unter Berücksichtigung der Wärmeverluste explizit bestimmt werden.

Gültigkeitsbereich des Newtonschen Abkühlungsgesetzes

In die vorangegangenen Überlegungen geht wesentlich das NEWTONSche Abkühlungsgesetz ein. Sein Anwendungsbereich soll jetzt festgelegt werden. Wir beschränken uns auf Versuche im Hochvakuum, denn dort ist die Abstrahlung allein für die Wärmeverluste an den Probenoberflächen verantwortlich. Diese betragen für den Fall, daß die Probenumgebung eine räumlich konstante Temperaturverteilung hat und gegen Temperaturstrahlung schwarz ist, pro Zeit- und Oberflächeneinheit

$$f_{\text{Str}} = A \sigma^* (T_{\text{Pr}}^4 - T_{\text{u}}^4). \quad (12)$$

Hierin ist A das Absorptionsvermögen der Probenoberfläche für die Temperaturstrahlung, σ^* die STEFAN-BOLTZMANNsche Konstante, T_{Pr} bzw. T_{u} die Temperatur der Probenoberfläche bzw. der Umgebung in °K. Für $(T_{\text{Pr}} - T_{\text{u}})/T_{\text{u}} \ll 1$ ergibt sich durch binomische Entwicklung

$$f_{\text{Str}} = 4 A \sigma^* T_{\text{u}}^3 (\vartheta_{\text{Pr}} - \vartheta_{\text{u}}). \quad (13)$$

Diese Gleichung besitzt die Form des NEWTONSchen Abkühlungsgesetzes, wie es in (2) benutzt wurde. Es gilt also für kleine Temperaturdifferenzen zwischen Probe und Umgebung und für den Fall einer schwarzen Umgebung konstanter Temperatur. Durch Vergleich von (13) und (2) erhält man weiterhin

$$A = h/4 \sigma^* T_{\text{u}}^3. \quad (14)$$

Nach der Bestimmung von h ermöglicht diese Beziehung zusätzlich die Berechnung des Absorptionsvermögens der Probenoberfläche.

Prinzipielle Probenanordnung

Die rechnerischen Ergebnisse zeigen, daß die Meßgenauigkeit für die Wärmeleitfähigkeit und die Konstante h nach (10) und (11) im wesentlichen von der Genauigkeit abhängt, mit der die auftretenden Temperaturdifferenzen gemessen werden können. Um an den Meßstellen die störende Wärmeableitung durch die Thermoelemente gering zu halten, können nach Abb. 2 als Probe zwei aufeinanderliegende Bänder gewählt werden, zwischen die die Lötstellen der Thermoelemente eingeklemmt sind. Die Endenstücke der Probe enthal-

ten Heizwicklungen für den Endenheizungsversuch und dienen gleichzeitig als Stromzuführungen für den Probenheizungsversuch. Oberhalb und unterhalb der Probe befinden sich dicke, geschwärzte Kupferblöcke, welche die geforderte schwarze Umgebung konstanter Temperatur realisieren sollen. Eine Beschreibung der Versuchsanordnung befindet sich in einer nachfolgenden Veröffentlichung⁶.

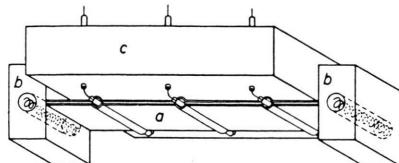


Abb. 2. Grundsätzliche Anordnung zur Messung der Wärmeleitfähigkeit. a) Probe mit Thermoelementen, b) Endenstücke mit Heizspiralen, c) Oberer Kupferblock mit Thermoelementdurchführungen (unterer Kupferblock herausgenommen).

Störeinflüsse im tatsächlichen Versuch

Die Erfahrung zeigt, daß die in der vorausgegangenen Rechnung verlangten Voraussetzungen nicht exakt eingehalten werden können. Es treten folgende Abweichungen vom Idealfall auf:

1. Ungenaue Temperaturmessung durch parasitäre Thermokräfte.
2. Unsymmetrische Temperaturverteilung in Längsrichtung der Probe.
3. Kleine Temperaturunterschiede zwischen den beiden Kupferblöcken⁷.
4. Nichtstationäre Vorgänge in der Probe.
5. Wärmeverluste an den Schmalseiten der Probe durch
 - a) seitliche Abstrahlung,
 - b) Wärmeableitung der Thermoelemente.
6. Änderung der Abstrahlungsverhältnisse der Probe zwischen zwei Teilversuchen.

Diese Einflüsse können durch die folgenden Korrekturen berücksichtigt werden.

Ungenaue Temperaturmessung durch parasitäre Thermokräfte

Die Thermoelemente sind, besonders bei hohen Temperaturen, nicht frei von parasitären Thermospannungen, die zu Fehlern $\Delta\vartheta$ in der Temperaturbestimmung Anlaß geben:

$$\vartheta_{\text{Meß}} = \vartheta_{\text{Wahr}} + \Delta\vartheta. \quad (15)$$

⁶ F. Ph. POTT, Z. Naturforschg. 13 a, im Erscheinen.

⁷ Das durch ungleichmäßige Abstrahlung der Probe hervorgerufene Temperaturgefälle in den Kupferblöcken kann

In den Bestimmungsgleichungen (10) und (11) für λ und h treten nur Temperaturdifferenzen auf, die zweckmäßig von zwei Thermoelementen a und b in Differenzschaltung gemessen werden. In diesem Fall gilt nach (15)

$$(\vartheta_b - \vartheta_a)_{\text{Meß}} = (\vartheta_b - \vartheta_a)_{\text{Wahr}} + (\Delta\vartheta_b - \Delta\vartheta_a). \quad (16)$$

Die Parasitenspannungen werden durch das Temperaturgefälle zwischen Versuchs- und Bezugstemperatur hervorgerufen. Da die Temperaturänderungen an den Meßstellen vor und während der Versuche im allgemeinen im Verhältnis zur Gesamttemperatur klein sind, so kann die Parasitenspannung $(\Delta\vartheta_b - \Delta\vartheta_a)$ im Verlauf eines Versuches als konstant angesehen werden (Nachprüfung erfolgte im Blindversuch). Es ist deshalb möglich, $(\Delta\vartheta_b - \Delta\vartheta_a)$ durch eine zusätzliche Temperaturbestimmung vor Versuchsbeginn zu eliminieren. Bezeichnet man die Temperaturmessung vor dem Versuch mit dem Index 1, diejenige während des Versuches mit dem Index 2, dann ergibt sich also

$$[(\vartheta_b - \vartheta_a)_2 - (\vartheta_b - \vartheta_a)_1]_{\text{Meß}} = [(\vartheta_b - \vartheta_a)_2 - (\vartheta_b - \vartheta_a)_1]_{\text{Wahr}}. \quad (17)$$

Es liegt nunmehr das Problem vor, eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (6) zu suchen, in der die gemessenen Temperaturen nur in der Form (17) eingehen. Da bei den mit 1 indizierten Messungen $k=0$ ist, gewinnt man durch Subtraktion der beiden Lösungen für $(\vartheta_x - \vartheta_u)_1$ und $(\vartheta_x - \vartheta_u)_2$ nach (7 b)

$$[(\vartheta_x - \vartheta_u)_2 - (\vartheta_x - \vartheta_u)_1]_{\text{Wahr}} = \left[[(\vartheta_l' - \vartheta_u)_2 - (\vartheta_l' - \vartheta_u)_1]_{\text{Wahr}} - \frac{k}{\mu^2} \right] \frac{\text{Cof } \mu_x}{\text{Cof } \mu l'} + \frac{k}{\mu^2}. \quad (18)$$

In dieser Gleichung sind nach (17) alle auftretenden Temperaturdifferenzen mit den gemessenen identisch. Sie stimmt mit (7) überein, wenn $(\vartheta_x - \vartheta_u)$ und $(\vartheta_l' - \vartheta_u)$ durch $[(\vartheta_x - \vartheta_u)_2 - (\vartheta_x - \vartheta_u)_1]_{\text{Meß}}$ und $[(\vartheta_l' - \vartheta_u)_2 - (\vartheta_l' - \vartheta_u)_1]_{\text{Meß}}$ ersetzt werden. Bei der Berechnung von λ und h aus (10) und (11) unter Eliminierung der parasitären Thermospannungen müssen also die gleichen Ersetzungen vorgenommen werden. Für die Versuchsdurchführung ist von Bedeutung, daß die so erweiterte Rechnung keine örtlich konstante Temperatur in der Probe vor der Durchführung der beiden Teilversuche voraussetzt.

unberücksichtigt bleiben. Rechnungen hierzu in: F. Ph. POTT, Diss. Münster 1955, S. 45.

In der benutzten experimentellen Anordnung erreichten die parasitären Thermokräfte Werte, die ohne Anwendung des beschriebenen Vorgehens zu Fehlmessungen bis zu 1°C geführt hätten.

Unsymmetrische Temperaturverteilung in der Probe

Im allgemeinen wird die Temperaturverteilung in Längsrichtung der Probe nicht genau symmetrisch zur Mitte sein. Durch Lösung von (6) mit allgemeineren Randbedingungen erhält man einen zu unserer bisherigen Ausgangsgleichung (7 b) analogen Ausdruck, in den an Stelle der Probentemperaturen ϑ_x und $\vartheta_{l'}$ die mittleren Temperaturen $(\vartheta_{+x} + \vartheta_{-x})/2$ und $(\vartheta_{+l'} + \vartheta_{-l'})/2$ von je zwei symmetrisch zur Probenmitte angeordneten Stellen $\pm x$ und $\pm l'$ eingehen. Man erhält so

$$\frac{\vartheta_{+x} + \vartheta_{-x} - \vartheta_u}{2} = \left(\frac{\vartheta_{+l'} + \vartheta_{-l'}}{2} - \vartheta_u - \frac{k}{\mu^2} \right) \frac{\operatorname{Coef} \mu x}{\operatorname{Coef} \mu l'} + \frac{k}{\mu^2}. \quad (19)$$

Bei asymmetrischer Temperaturverteilung längs der Probe ist also in den Bestimmungsgleichungen (10) und (11) für λ und h die Temperaturdifferenz $(\vartheta_{l'} - \vartheta_u)$ durch die mittlere Temperaturdifferenz $[(\vartheta_{+l'} + \vartheta_{-l'})/2] - \vartheta_u$ zu ersetzen.

Kleine Temperaturunterschiede zwischen den beiden Kupferblöcken

Im Versuch können die Temperaturen ϑ_{uo} und ϑ_{uu} des oberen und unteren Kupferblockes etwas voneinander verschieden sein (maximal bis $0,05^{\circ}\text{C}$). Im Anschluß an (2) für etwas verschiedene Umgebungstemperaturen durchgeführte Rechnungen zeigen, daß man diesem Umstand dadurch Rechnung tragen kann, indem in (10) und (11) an Stelle von ϑ_u der Mittelwert $(\vartheta_{uo} + \vartheta_{uu})/2$ eingesetzt wird.

Nichtstationäre Vorgänge in der Probe

Während des Versuches wird der Probe elektrische Energie zugeführt, die einmal durch Wärmeleitung an die Endenstücke und zum anderen durch Strahlung an die Kupferblöcke abgeleitet wird. Auf diese Weise werden die Endenstücke und Kupferblöcke allmählich aufgeheizt und streben nur langsam einem stationären Endzustand zu. Um die Auswirkung dieser von der y -Richtung unabhängigen

Erscheinung auf die Probentemperatur zu erfassen, soll angenommen werden, daß die zeitliche Temperaturänderung der Meßstellen in Nähe der Endenstücke bzw. an den Kupferblöcken nach dem linearen Zeitgesetz $\vartheta_{l'}^* = \vartheta_{l'} + \alpha t$ bzw. $\vartheta_u^* = \vartheta_u + \beta t$ erfolgt. Hieraus leiten sich folgende Rand- und Anfangsbedingungen ab

$$\begin{aligned} \vartheta_x &= \vartheta_u && \text{im Zeitpunkt } t = 0 \text{ für alle } x, \\ \vartheta_x &= \vartheta_{l'} + \alpha t && \text{für } t > 0 \text{ für } x = \pm l'. \end{aligned} \quad (20)$$

Als Lösung von (4) ergibt sich hiermit im eindimensionalen Fall

$$[\vartheta_x - (\vartheta_u + \beta t)]_{\text{Nichtst.}}$$

$$\begin{aligned} &= \left[(\vartheta_{l'} + \alpha t) - (\vartheta_u + \beta t) - \frac{k}{\mu^2} \right] \frac{\operatorname{Coef} \mu x}{\operatorname{Coef} \mu l'} + \frac{k}{\mu^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right\} \\ &- \frac{16 l'^2}{\pi^3 \kappa} (\alpha - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l'}}{\left[(2n+1)^2 + \frac{4l'^2 \mu^2}{\pi^2} \right]^2} \\ &- \frac{16 l'^2}{\pi^3 \kappa} \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l'}}{(2n+1) \left[(2n+1)^2 + \frac{4l'^2 \mu^2}{\pi^2} \right]} \quad \left. \begin{array}{l} \text{II} \\ \text{III} \end{array} \right\} \\ &- 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l'}}{\frac{4l'^2 \mu^2}{\pi^2} + (2n+1)^2} e^{-t \frac{\pi^2}{4l'^2} \left[(2n+1)^2 + \frac{4l'^2 \mu^2}{\pi^2} \right]} \\ &\cdot \left. \begin{array}{l} \frac{2n+1}{\pi} (\vartheta_{l'} - \vartheta_u) - \frac{4(2n+1)l'^2}{\pi^3 \kappa} \\ \frac{\alpha - \beta}{\frac{4l'^2 \mu^2}{\pi^2} + (2n+1)^2} + \frac{4l'^2 [k - (\beta/\kappa)]}{\pi^3 (2n+1)} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Hierin ist Term I die stationäre Lösung (7 b) für die im Zeitpunkt t festgehaltenen Enden- und Umgebungstemperaturen $\vartheta_{l'}^* = \vartheta_{l'} + \alpha t$ und $\vartheta_u^* = \vartheta_u + \beta t$. Deshalb soll geschrieben werden:

$$[\vartheta_x - (\vartheta_u + \beta t)]_{\text{Stat.}}$$

$$= \left[(\vartheta_{l'} + \alpha t) - (\vartheta_u + \beta t) - \frac{k}{\mu^2} \right] \frac{\operatorname{Coef} \mu x}{\operatorname{Coef} \mu l'} + \frac{k}{\mu^2}. \quad (22)$$

Der zeitunabhängige Term II bezeichnet das Nachhinken der Temperatur an der jeweiligen Probenstelle x gegenüber dem stationären Zustand, der sich einstellen würde, wenn im betrachteten Zeitpunkt t die Enden- und Umgebungstemperaturen festgehalten würden. Der zeitabhängige Term III nimmt exponentiell mit wachsender Zeit t ab. Er stellt die Einschwingvorgänge dar, die auf Grund der mathematisch vorgegebenen Randbedingungen

aufreten und nach kurzer Zeit abgeklungen sind. Da die Temperaturmessungen stets nach Beendigung dieser Vorgänge durchgeführt werden sollen, kann er in den nachfolgenden Betrachtungen unberücksichtigt bleiben. Dann wird aus (21) und (22)

$$[\vartheta_x - (\vartheta_u + \beta t)]_{\text{Stat.}} \\ = [\vartheta_x - (\vartheta_u + \beta t)]_{\text{Nichtstat.}}$$

$$+ \frac{16 l^2}{\pi^3 \alpha} \left\{ (\alpha - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{\left[(2n+1)^2 + \frac{4l^2\mu^2}{\pi^2}\right]^2} \right. \\ \left. + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1) \left[(2n+1)^2 + \frac{4l^2\mu^2}{\pi^2}\right]} \right\}. \quad (23)$$

Hier stellt das Glied $[\vartheta_x - (\vartheta_u + \beta t)]_{\text{Nichtstat.}}$ die tatsächlich gemessene Temperaturdifferenz zwischen Probe und Umgebung im Zeitpunkt t dar. Die folgenden Glieder sind Korrekturgrößen, die an den Meßgrößen anzubringen sind, um aus ihnen λ und h nach (10) und (11) unter Berücksichtigung der Nichtstationarität zu bestimmen. Die Korrekturglieder enthalten allerdings in μ , α und k noch explizit die Größen λ , h , c und d . Für den erforderlichen Grad der Näherung genügt es aber, λ und h den unkorrigierten Gln. (10) und (11) zu entnehmen und c und d aus Tabellen einzusetzen. Dieses gilt

sinngemäß auch für die weiteren Korrekturrechnungen.

In durchgeführten Messungen lagen die Korrekturgrößen zwischen $0,02^\circ\text{C}$ und $0,1^\circ\text{C}$; das entsprach im allgemeinen 1%, in ungünstigen Fällen 4% der Meßwerte.

Wärmeverluste an den Schmalseiten der Proben

Die Wärmeverluste durch Strahlung der Schmalseiten und durch Ableitung der Thermoelemente bedingen in der Probe einen stationären Wärmestrom in y -Richtung. Zu ihrer Berücksichtigung gehen wir von (4) aus. Für den stationären Zustand lautet diese Gleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{x,y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_{x,y}}{\partial y^2} - \mu^2(\vartheta_{x,y} - \vartheta_u) + k = 0. \quad (24)$$

Im Versuch ist die Probe zwischen den Endstücken ($x = \pm l$) eingespannt. Hier ist die Temperatur als unabhängig von y anzusehen. Im Probenkörper soll die Temperaturverteilung in x -Richtung symmetrisch zur Mitte der Probe sein. Als Randbedingung für die Schmalseiten $y = \pm p/4$ wird die Wärmestromdichte $f(x, \pm p/4)$ in y -Richtung als Funktion von x vorgegeben. Da an beiden Rändern die Wärmeverluste entgegengerichtet sind und aus Symmetriegründen in den Beträgen übereinstimmen, gilt

$$f(x, +p/4) = -f(x, -p/4) = f(x) = -\lambda \frac{\partial \vartheta_{x,y=p/4}}{\partial y}. \quad (25)$$

Mit der FOURIER-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi(x+l)}{2l}, \quad \text{wo } b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{n\pi(x+l)}{2l} dx \quad (26)$$

erhält man als Lösung dieses zweidimensionalen Problems

$$\vartheta_{x,y} - \vartheta_u = \left(\vartheta_l - \vartheta_u - \frac{k}{\mu^2} \right) \frac{\operatorname{Co} \mu x}{\operatorname{Co} \mu l} + \frac{k}{\mu^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda} \sin \frac{n\pi(x+l)}{2l} \frac{\operatorname{Co} \left\{ y \left(\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{4l^2} \right)^{1/2} \right\}}{\left(\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{4l^2} \right)^{1/2}} \frac{\operatorname{Si} \left\{ \frac{p}{4} \left(\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{4l^2} \right)^{1/2} \right\}}{\operatorname{Si} \left\{ \frac{p}{4} \left(\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{4l^2} \right)^{1/2} \right\}}. \quad (27)$$

Da sich die Lötstellen der Thermoelemente in der Längsachse der Proben ($y=0$) befinden, interessiert nur die Temperaturverteilung $\vartheta_{x,0}$ auf dieser Achse. Hier gilt nach (27)

$$\vartheta_{x,0} - \vartheta_u = \underbrace{\left(\vartheta_l - \vartheta_u - \frac{k}{\mu^2} \right) \frac{\operatorname{Co} \mu x}{\operatorname{Co} \mu l} + \frac{k}{\mu^2}}_{\text{I}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda} \frac{\sin \frac{n\pi(x+l)}{2l}}{\left(\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{4l^2} \right)^{1/2}} \frac{\operatorname{Si} \left\{ \frac{p}{4} \left(\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{4l^2} \right)^{1/2} \right\}}{\operatorname{Si} \left\{ \frac{p}{4} \left(\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{4l^2} \right)^{1/2} \right\}}}_{\text{II}}. \quad (28)$$

Auf $x=0$ und $x=l'$ bezogen, gibt die linke Seite dieser Gleichung die Temperaturmeßwerte an diesen Stellen wieder. Der Term I der rechten Seite ist der ungestörte Idealwert $(\vartheta_{x,0} - \vartheta_u)_{\text{Ideal}}$, während Term II das durch die seitlichen Wärmeverluste verursachte Korrekturglied bedeutet. Somit läßt sich für (28) schreiben:

$$(\vartheta_{x,0} - \vartheta_u)_{\text{Ideal}} = (\vartheta_{x,0} - \vartheta_u)_{\text{Meß}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n \sin \frac{n \pi (x+l)}{2l}}{\lambda \left(\mu^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4l^2} \right)^{1/2}} \Xi \sin \left\{ \frac{p}{4} \left(\mu^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4l^2} \right)^{1/2} \right\}. \quad (29)$$

Um die FOURIER-Koeffizienten der Korrekturglieder explizit bestimmen zu können, müssen die Funktionen $f(x)$ der Probenschmalseiten vorgegeben werden. Da sich diese additiv aus einem Strahlungsanteil $f^S(x)$ und einem Wärmeableitungsanteil $f^{\text{Th}}(x)$ durch die Thermoelemente zusammensetzen, ergibt sich auch die Additivität der FOURIER-Koeffizienten

$$b_n = b_n^S + b_n^{\text{Th}}, \quad (30)$$

die im folgenden einzeln bestimmt werden sollen.

Seitliche Abstrahlung

Die Schmalseiten der Probe strahlen wie die übrigen Probenoberflächen. Wir können auf sie also das NEWTONSCHE Abkühlungsgesetz (2) anwenden

$$f^S(x) = h(\vartheta_{(x,y=\pm p/4)} - \vartheta_u). \quad (31)$$

Für die Korrekturrechnung kann mit ausreichender Genauigkeit eine Temperaturverteilung nach (7 a) angenommen werden. Für diese schreibt sich (31) unter Berücksichtigung von (7 b)

$$f^S(x) = h \left\{ \left(\vartheta_{l'} - \vartheta_u - \frac{k}{\mu^2} \right) \frac{\text{Cof } \mu x}{\text{Cof } \mu l'} + \frac{k}{\mu^2} \right\}, \quad (32)$$

woraus sich nach (26) die FOURIER-Koeffizienten ergeben.

Durch Zusammenfassung von (29), (32) und (26) ergibt sich für die in (10) und (11) zu benutzenden korrigierten $(\vartheta_{x,0} - \vartheta_u)$ -Werte

$$\begin{aligned} (\vartheta_{x,0} - \vartheta_u)_{\text{Ideal}} &= (\vartheta_{x,0} - \vartheta_u)_{\text{Meß}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}^S \sin \frac{(2n+1)\pi(x+l)}{2l}}{\lambda \left(\mu^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} \right)^{1/2}} \Xi \sin \left\{ \frac{p}{4} \left(\mu^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} \right)^{1/2} \right\}; \\ \text{mit } b_{2n+1}^S &= \frac{4h}{\pi} \left\{ \frac{k}{\mu^2} \frac{1}{2n+1} + \left(\vartheta_{l'} - \vartheta_u - \frac{k}{\mu^2} \right) \frac{\text{Cof } \mu l'}{\text{Cof } \mu l} \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + \frac{4l^2 \mu^2}{\pi^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

k und μ sind wieder den Gln. (5), (10) und (11) zu entnehmen. In den durchgeführten Versuchen erreichten die Abstrahlungskorrekturen maximal $0,2^\circ\text{C}$, das entsprach ca. 3% der Meßwerte.

Wärmeableitung durch Thermoelemente

Die Wärmeableitungsverhältnisse der Thermoelemente sind unübersichtlich. Um ihre Größenordnung zu erfassen, soll angenommen werden, daß die Wärmeableitung durch bandförmige Thermoschenkel erfolgt, und zwar so, als ob diese mit der Probe in direktem Wärmekontakt stünden. An den Austrittsstellen der Schenkel aus der Probe beträgt somit die Wärmestromdichte f^{Th} in y -Richtung

$$f^{\text{Th}} = \frac{W^{\text{Th}}}{q^{\text{Th}}} = \frac{W^{\text{Th}}}{4 \varepsilon b}, \quad (34)$$

wo W^{Th} den Wärmestrom durch den betrachteten Thermoschenkel, q^{Th} den Thermodrahtquerschnitt, $2b$ die Probendicke und 2ε die Breite der Schenkel darstellen, die so festzusetzen sind, daß

$$q^{\text{Th}} = 4\varepsilon b = \pi r^2 \quad (35)$$

dem tatsächlichen Querschnitt πr^2 der Thermodrähte entspricht. Der gesamte Verlauf der Funktion f^{Th} an einer Probenschmalseite hat dann die in Abb. 3 skizzierte, kastenförmige Gestalt. Wegen des ungleichen Materials der zum gleichen Element gehörigen Thermoschenkel unterscheiden sich diese Funktionen auf den beiden Schmalseiten der Probe um einen konstanten Faktor. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß

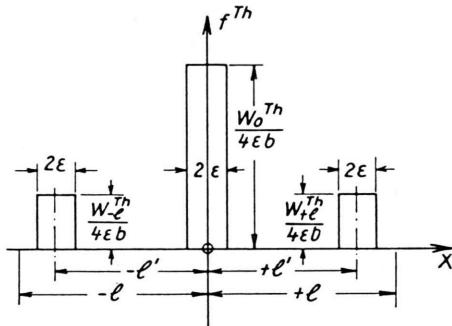


Abb. 3. Wärmeableitung durch die Thermoelemente an den Schmalseiten der Probe.

in diesem Falle der Wärmestrom jedes Thermoschenkels durch den mittleren Wärmestrom der beiden zum gleichen Element gehörigen Schenkel ersetzt werden kann. Mit dieser Feststellung gewinnt man nach (26) die FOURIER-Koeffizienten

$$b_n^{\text{Th}} = \frac{1}{4 \varepsilon l b} \left\{ W_{+l}^{\text{Th}} \int_{-\varepsilon-l'}^{+\varepsilon-l'} \sin \frac{n \pi (x+l)}{2l} dx + W_0^{\text{Th}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sin \frac{n \pi (x+l)}{2l} dx + W_{-l}^{\text{Th}} \int_{-\varepsilon+l'}^{\varepsilon+l'} \sin \frac{n \pi (x+l)}{2l} dx \right\}, \quad (36)$$

wobei aus Symmetriegründen $W_{+l'}^{\text{Th}} = W_{-l'}^{\text{Th}} = W_l^{\text{Th}}$ ist.

Für die explizite Auswertung von (36) müssen noch die Wärmeströme durch die einzelnen Thermoelemente an den Berührungsstellen mit der Probe bekannt sein. Physikalisch liegt hier das Problem vor, daß ein dünner Draht zwischen zwei Körpern verschiedener Temperatur (Probe Pr und Kupferblock Cu) ausgespannt ist und neben der Wärmeleitung durch Strahlung Wärme an die Umgebung mit der Temperatur ϑ_u abgibt.

Die Lösung dieses linearen stationären Problems gewinnt man im Anschluß an (6) für eine asymmetrische Temperaturverteilung, $k=0$ und Umgebungstemperatur = Blocktemperatur. Es ergibt sich für den Wärmestrom durch den Thermodraht an der Berührungsstelle Draht – Probe

$$W^{\text{Th}} = \pi r^2 \lambda^{\text{Th}} \mu^{\text{Th}} (\vartheta_{\text{Pr}} - \vartheta_u) \operatorname{Cotg} 2 \mu^{\text{Th}} l^{\text{Th}}, \quad (37)$$

wenn $(\vartheta_{\text{Pr}} - \vartheta_u)$ die Temperaturdifferenz zwischen der Berührungsstelle Thermoschenkel – Probe und der Umgebung, $2 l^{\text{Th}}$ die Drahlänge zwischen Probe und Kupferblock bedeuten. Ferner gilt $\mu^{\text{Th}} = \left(\frac{2 h^{\text{Th}}}{r \lambda^{\text{Th}}} \right)^{\frac{1}{2}}$ mit λ^{Th} = mittlere Wärmeleitfähigkeit und h^{Th} = mittlere Abstrahlungskonstante [vgl. (2) und (13)] der beiden Thermoschenkel.

Durch Zusammenfassung von (29), (36) und (37) ergibt sich hiermit für die in (10) und (11) benötigten $(\vartheta_{x,0} - \vartheta_u)_{\text{Ideal}}$ -Werte die Korrektur:

$$(\vartheta_{x,0} - \vartheta_u)_{\text{Ideal}} = (\vartheta_{x,0} - \vartheta_u)_{\text{Meß}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}^{\text{Th}} \sin \frac{(2n+1)\pi(x+l)}{2l}}{\lambda \left(\mu^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Sin} \left\{ \frac{p}{4} \left(\mu^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}} \quad (38)$$

mit $b_{2n+1}^{\text{Th}} = \frac{(-1)^n \pi r^2}{2l b} \lambda^{\text{Th}} \mu^{\text{Th}} \operatorname{Cotg} 2 \mu^{\text{Th}} l^{\text{Th}} \left\{ 2(\vartheta_{l'} - \vartheta_u) \cos \frac{l'(2n+1)\pi}{2l} + (\vartheta_o - \vartheta_u) \right\}$.

Die Korrektur durch Wärmeableitung der Thermoelemente (Durchmesser 0,1 mm) betrug in durchgeführten Versuchen ca. $0,01^\circ\text{C}$, das entsprach ca. 0,3% der Meßwerte.

Aenderung der Abstrahlung zwischen zwei Teilversuchen

Zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit nach (10) und (11) sind zwei Messungen (Endenheizung: Index EH und Probenheizung: Index PH) erforderlich. In beiden Versuchsreihen sind die Umgebungstemperaturen, und damit auch nach (13) die jeweiligen h -Werte in (8) und (9) nicht exakt gleich. Diese Unterschiede sollen nun berücksichtigt werden. Das Verhältnis der h -Werte im Enden- und Probenheizungsversuch ergibt sich nach (13) unter gleichzeitiger Weiterführung der binomischen Entwicklung um ein Glied zu

$$\frac{h^{EH}}{h^{PH}} = \frac{(T_u^{EH})^3 \left(1 + 1,5 \frac{\Delta T_{Pr}^{EH}}{T_u^{EH}}\right)}{(T_u^{PH})^3 \left(1 + 1,5 \frac{\Delta T_{Pr}^{PH}}{T_u^{PH}}\right)}, \quad (39)$$

Die Werte der rechten Seite dieser Gleichung sind sofort aus (9) zu entnehmen. Hierdurch geht (43) unter Verwendung der Abkürzung

$$C = H (\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH} \Re \operatorname{Coj} \frac{(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH}}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}} \Im \sin \left(\Re \operatorname{Coj} \frac{(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH}}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}} \right) \quad (44)$$

in

$$\operatorname{Coj} \mu^{PH} l' = \frac{(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH} - C}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}} \quad (45)$$

über. Mit dieser auf Temperaturverhältnisse des Probenheizungsversuches zugeschnittenen Endenheizungsgleichung (9) kann in analoger Weise wie früher die korrigierte Gleichung (11) erhalten werden:

$$h^{PH} = \frac{J^2 \varrho}{p q} \frac{(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH} - C - (\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{PH} [(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH} - C] - (\vartheta_l' - \vartheta_u)^{PH} (\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}}. \quad (46)$$

Durch Übergang von h^{PH} zu h^{EH} nach (40) läßt sich auch λ in korrekter Weise aus der nur die Temperaturdifferenzen des Endenheizungsversuches enthaltenden Gl. (9) ermitteln. So ergibt sich an Stelle von (10)

$$\lambda^{EH} = \frac{p l'^2}{q} \frac{h^{PH}(1+2H)}{\left(\Re \operatorname{Coj} \frac{(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH}}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}} \right)^2}. \quad (47)$$

Dabei ist zu beachten, daß h^{PH} für die Temperaturverhältnisse beim Probenheizungsversuch und λ^{EH} für diejenigen beim Endenheizungsversuch gelten.

Die Korrektur der λ - und h -Werte betrug in den durchgeführten Versuchen bis 5%.

Meßergebnisse

Die Brauchbarkeit des vorgeschlagenen Verfahrens soll durch Wärmeleitfähigkeitsmessungen an einem dünnen Kupferdoppelband belegt werden. Kurve a in Abb. 4 zeigt den mit dem ursprünglichen Verfahren nach KOHLRAUSCH unter Vernachlässigung der Abstrahlung gemessenen Temperatur-

wo $\Delta T_{Pr} = T_{Pr} - T_u$ die durchschnittliche Temperaturdifferenz zwischen Probe und Umgebung in $^{\circ}\text{K}$ während der einzelnen Versuchsreihen bedeuten. Beachtet man, daß sich die Umgebungstemperaturen in den beiden Meßreihen nur wenig voneinander unterscheiden, dann geht (39) über in

$$h^{EH} = h^{PH}(1 + 2H) \quad (40)$$

$$\text{mit } H = \frac{0,75}{T_u^{EH}} (\Delta T_{Pr}^{EH} - \Delta T_{Pr}^{PH} - 2 \Delta T_u) \quad (41)$$

und $\Delta T_u = T_u^{PH} - T_u^{EH}$. Diese Beziehung zwischen h^{EH} und h^{PH} soll zur Ermittlung eines rechnerischen Zusammenhangs zwischen den Größen in beiden Teilversuchen ausgenutzt werden. Da $H \ll 1$, folgt aus (5) und (40)

$$\mu^{PH} = \mu^{EH}(1 + 2H)^{-1/2} \approx \mu^{EH}(1 - H). \quad (42)$$

Unter der Berücksichtigung, daß im Normalfall $H \mu l' < 0,1$ ist, folgt hieraus die Entwicklung

$$\operatorname{Coj} \mu^{PH} l' = \operatorname{Coj} \mu^{EH} l' - H \mu^{EH} l' \cdot \Im \sin \mu^{EH} l'. \quad (43)$$

Die Werte der rechten Seite dieser Gleichung sind sofort aus (9) zu entnehmen. Hierdurch geht (43) unter Verwendung der Abkürzung

$$C = H (\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH} \Re \operatorname{Coj} \frac{(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH}}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}} \Im \sin \left(\Re \operatorname{Coj} \frac{(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH}}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}} \right) \quad (44)$$

$$\operatorname{Coj} \mu^{PH} l' = \frac{(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH} - C}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}} \quad (45)$$

über. Mit dieser auf Temperaturverhältnisse des Probenheizungsversuches zugeschnittenen Endenheizungsgleichung (9) kann in analoger Weise wie früher die korrigierte Gleichung (11) erhalten werden:

$$h^{PH} = \frac{J^2 \varrho}{p q} \frac{(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH} - C - (\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{PH} [(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH} - C] - (\vartheta_l' - \vartheta_u)^{PH} (\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}}. \quad (46)$$

Durch Übergang von h^{PH} zu h^{EH} nach (40) läßt sich auch λ in korrekter Weise aus der nur die Temperaturdifferenzen des Endenheizungsversuches enthaltenden Gl. (9) ermitteln. So ergibt sich an Stelle von (10)

$$\lambda^{EH} = \frac{p l'^2}{q} \frac{h^{PH}(1+2H)}{\left(\Re \operatorname{Coj} \frac{(\vartheta_l' - \vartheta_u)^{EH}}{(\vartheta_o - \vartheta_u)^{EH}} \right)^2}. \quad (47)$$

verlauf von λ . Während der Meßwert bei Zimmertemperatur auf 4% mit den von SCHOFIELD⁸ an einem dicken Kupferstab unter Benutzung einer Schutzringheizung gewonnenen Werten übereinstimmt, fallen die Meßwerte bei hohen Temperaturen vollständig aus dem Rahmen. Bei 300°C liegt bereits eine

⁸ F. H. SCHOFIELD, Proc. Roy. Soc., Lond. A 107, 206 [1925].

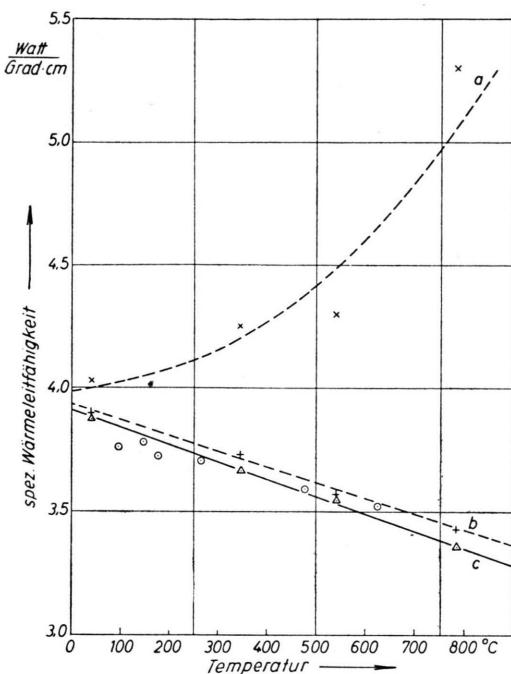


Abb. 4. Temperaturverlauf der Wärmeleitfähigkeit von Kupfer. \times Meßwerte ohne Berücksichtigung der Abstrahlung (Verfahren von KOHLRAUSCH); $+$ Meßwerte unter Berücksichtigung der Abstrahlung (Proben- und Endenheizungsversuch); Δ Meßwerte unter zusätzlicher Berücksichtigung der vom Idealfall abweichenden Versuchsbedingungen. \odot Meßwerte von SCHOFIELD⁸.

Abweichung um 15% nach oben vor. Kurve b zeigt den mit Hilfe des abgewandelten Verfahrens im Proben- und Endenheizungsversuch ohne Berücksichtigung der Korrekturen⁹ gewonnenen Verlauf von λ . Er schmiegt sich bereits gut den SCHOFIELDschen Werten an. Durch Berücksichtigung sämtlicher Korrekturen (Kurve c) sinken im betrachteten Beispiel die Meßwerte noch um weitere 2%. Wegen der ausgezeichneten Leitfähigkeit und des kleinen Absorptionsvermögens (ca. 3%) von Kupfer fallen die Korrekturen nur wenig ins Gewicht. Bei Messungen an schlechten Leitern ergeben sich aber gegenüber den unkorrigierten Werten Abweichungen bis 6%. Die erreichte Genauigkeit hängt im wesentlichen von der Temperaturmessung ab und dürfte bei den mitgeteilten Untersuchungen etwa 3% betragen.

Über weitere Wärmeleitfähigkeitsmessungen an Legierungen der Kupfer-Palladium-Legierungsreihe wird in einer nachfolgenden Veröffentlichung⁶ berichtet.

⁹ Hier, wie im Falle der Kurve a, wurden die mit dem Verfahren nicht in direktem Zusammenhang stehenden parasitären Thermospannungen bereits eliminiert.